آموزشی

حمیدرضا امیری

۷

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

27. Let p be *a* prime number. If p divides the product ab, then p divides either a or b.

Proof. If p does not divide a, then $GCD(a,p)=1$. (Explain why.)

Therefore, $1=sa+pt$

for some integers s and p.

(See Exercise 26.) Thus

$$\begin{aligned} b &= b(sa+pt) \\ &= (ab)s+bpt \\ &= (kp)s+bpt \\ &= p(ks+bt). \end{aligned}$$

This implies that p divides b.

28. Let p be a prime number. Then $\sqrt{p}$ is an irrational number. ■

Proof. We assume that $\sqrt{p}$ is a rational number, that is

$$\sqrt{p}=\frac{n}{q}$$

with $n\neq 0$, $q\neq 0$, n and q integres, with the fraction written in reduced form. (See the front of the book on rational numbers.) Therefore,

$$p=\frac{n^2}{q^2}.$$

Thus

$$n^2=pq^2.$$

As n^2 is a multiple of p, which is a prime number, then n must be a multiple of p.

۲۷. فرض کنیم p یک عدد اول باشد. اگر p حاصل‌ضرب ab را عاد کند (بشمارد)، آن‌گاه p، a یا b را می‌شمارد.

اثبات: اگر p عاد نکند، a را، در این صورت: $(a,p)=1$ (توضیح دهید چرا). بنابراین، برای اعدادی صحیح چون s و t داریم:

(تمرین ۲۶ را ملاحظه کنید) $1=sa+pt$

$\Rightarrow b=b(sa+pt)=(ab)s+(bp)t=(kp)s+bpt$

$=p(ks+bt)$.

تساوی اخیر نشان می‌دهد که p، b را عاد می‌کند.

۲۸. فرض کنیم p عدد اول باشد. در این‌صورت $\sqrt{p}$ عددی گنگ است.

اثبات: فرض می‌کنیم که $\sqrt{p}$ یک عدد گویا باشد، به‌طوری که: $\sqrt{p}=\frac{n}{q}$ و $n\neq 0$ و $q\neq 0$. n و q اعدادی صحیح هستند به قسمی که کسر (حاصل از آن‌ها) تحویل‌ناپذیر (به ساده‌ترین صورت نوشته شده) است.

بنابراین: $p=\frac{n^2}{q^2}$ در نتیجه $n^2=pq^2$.

چون n^2 مضرب p و p اول است، پس n باید مضرب p باشد. (تمرین ۲۷ را ملاحظه کنید). بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $n=pk$. برای عددی صحیح و مثبت مانند k، این نشان می‌دهد: $p^2k^2=pq^2$ یا: $pk^2=q^2$.

حال چون q^2 مضرب p و p اول است، بنابراین q باید مضرب p باشد (تمرین ۲۷ را ملاحظه کنید.) بنابراین برای عددی صحیح و مثبت مانند m می‌توانیم بنویسیم: $q=pm$. پس:

$$\frac{n}{q}=\frac{pk}{pm}=\frac{k}{m}$$

این موضوع با فرض تحویل‌ناپذیر بودن کسر $\frac{n}{q}$ تناقض دارد و لذا ثابت می‌شود که $\sqrt{p}$ عددی گنگ است.

کلمه‌ها و اصطلاحات مهم

1. Prime number عدد اول
2. Divides عاد می‌کند
3. Product حاصل‌ضرب
4. Irrational گنگ، ناگویا
5. Rational number عدد گویا
6. Fraction کسر
7. Multiple مضرب
8. Positive integer صحیحِ مثبت
9. Contradict تناقض

(See Exercise 27.) Therefore we can write $n=pk$ for some positive integer k. This implies

$$p^2k^2=pq^2$$

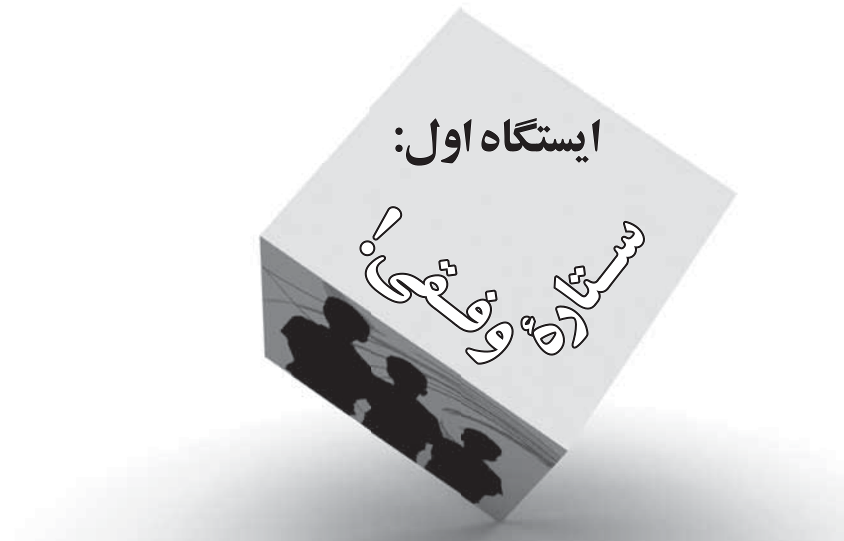
or

$$pk^2=q^2.$$

As q^2 is a multiple of p, which is a prime number, then q must be a multiple of p. (See Exercise 27.) Therefore we can write $q=pm$ for some positive integer m. Therefore

$$\frac{n}{q}=\frac{pk}{pm}=\frac{k}{m}.$$

This contradicts the fact that the fraction n/q is already in reduced form, and proves that $\sqrt{p}$ is an irrational number.



برای ایستگاه اول اندیشه می‌خواهیم شما را به یک چالش عددی دعوت کنیم! عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و... و ۱۷ را در هفده خانهٔ شکل زیـر طوری قرار دهید که مجموع اعداد روی هر پنج خانهٔ یک ردیف با هم برابر باشـند. یعنی پنج خانه‌ای که روی یک خط راسـت قرار دارند، دارای مجموع ثابتی باشند. آیا می‌توانید برای این کار یک ایدهٔ ریاضی ارائه دهید؟ یا این کار را با روش سعی و خطا انجام می‌دهید؟ در هر حال اگر به جواب نرسـیدید، برای مشاهدهٔ پاسخ به صفحهٔ ۴۷ مراجعه کنید.